**Ad-soyad :** Cevap Anahtarı

**Numara :**

**Lineer Cebir II Ara Sınav Soruları** **~~18~~ 19.04.2022**

**NOT :** Sorularda belirtilen yöntemlerden başka yöntemlerle yapılan çözümler kabul edilmeyecektir. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Süre 90 dakikadır. Başarılar dilerim.

1) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2 & 4\\ 3 & 0 & -5 & -1\\ 1 & 6 & 3 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -3\\ 0 & -1 & 4 & 2\\ -3 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor (20 p).

a) $2A-3B=?$ b) $B^t$=? c) $AB^t$ =? d) iz($AB^t$)=?

2) Eğer mümkünse elementer işlemler yardımıyla $A=\begin{bmatrix}6 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -20 & 16 & -7\end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz (20 p).

3) $\begin{cases} x+y+z=10\\ -y+z=3\\ -4x+3y+5z=3\end{cases}$ lineer denklem sistemini elementer işlemler yardımıyla çözünüz (25 p).

4) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ lineer dönüşümü $A(x,y,z)=(x+y,x-y,y+z,y-z)$ şeklinde tanımlanıyor.

a) A lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi yazınız (5 p).

b) A lineer dönüşümünün çekirdeğini bulunuz (10 p).

c) rankA=? (10 p)

5) V ve W, F cismi üzerinde vektör uzayları, $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ ve $\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}$ ise sırasıyla V ve W nun bazları olsun. Bir $A:V\to W$ lineer dönüşümü için $A(\alpha_i)=\beta_i,\ i=1,2,...,n$ olduğuna göre A nın bir lineer izomorfizm olduğunu gösteriniz (10 p) .

1) a)

$$2A - 3B = 2\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 2-3 & -4+3 & 8+9 \\ 6 & 3 & -10-12 & -2-6 \\ 2+9 & 12 & 6-3 & -4-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 6 & 3 & -22 & -8 \\ 11 & 12 & 3 & -13 \end{bmatrix}$$

b)

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c)

$$AB^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+1.1-2(-1)+4(-3) & 2.0+1(-1)-2.4+4.2 & 2.(-3)+1.0-2.1+4.3 \\ 3.1+0.1-5(-1)-1(-3) & 3.0+0.(-1)-5.4-1.2 & 3.(-3)+0.0-5.1-1.3 \\ 1.1+6.1+3.(-1)-2.(-3) & 1.0+6.(-1)+3.4-2.2 & 1.(-3)+6.0+3.1-2.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -1 & 4 \\ 11 & -22 & -17 \\ 10 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

d) $iz(AB^t) = -7-22-6 = -35$

2)

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -20 & 16 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-16S_2+S_3]{4S_2+S_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & -7 & 0 & -16 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{3S_1+S_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3S_3+S_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 10 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & -8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{-S_3+S_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & -8 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-S_3]{-\frac{1}{2}S_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 8 & -3 \end{array}\right] \quad \underbrace{\begin{matrix} 7/2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & 8 & -3 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[3S_2+S_3]{S_2+S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 8 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[-S_2]{4S_1+S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 16 & 64 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{16}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[S_3+S_2]{-2S_3+S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow x=5,\ y=1,\ z=4$$

4) a) $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ ün standart bazları, sırasıyla, $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ve $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ dir.

$$A(1,0,0) = (1,1,0,0) = \underline{1}.(1,0,0,0) + \underline{1}.(0,1,0,0) + \underline{0}.(0,0,1,0) + \underline{0}.(0,0,0,1)$$

$$A(0,1,0) = (1,-1,1,1) = \underline{1}(1,0,0,0) \underline{-1}(0,1,0,0) + \underline{1}(0,0,1,0) + \underline{1}(0,0,0,1)$$

$$A(0,0,1) = (0,0,1,-1) = \underline{0}(1,0,0,0) + \underline{0}(0,1,0,0) + \underline{1}(0,0,1,0) \underline{-1}(0,0,0,1)$$

$\Rightarrow$ A ya karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ dir.

b) $\text{çek}A = A^{-1}(0) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : A(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+y, x-y, y+z, y-z) = (0,0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0, x-y=0, y+z=0, y-z=0\}$

$= \{(x+y+z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z=0\}$

$= \{(0,0,0)\}$

c) $\text{boy}\,\mathbb{R}^3 = \text{rank}A + \text{boy}\,\text{çek}A \Rightarrow 3 = \text{rank}A + 0 \Rightarrow \text{rank}A = 3$

5) A nın lineer izomorfizm olduğunu göstermek için

$A$ birebirdir

$\alpha\in V$ için $A(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha = 0$

$\text{boy}\,\text{çek}A = 0$

$\text{rank}A = n$

$A$ örtendir

şartlarından birinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

$\alpha\in V$ için $A(\alpha)=0$ olduğunu kabul edelim.

$\alpha\in V \Rightarrow \alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$ şeklinde tek türlü yazılabilir.

$A(\alpha)=0 \Rightarrow A(\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i) = 0 \Rightarrow$ A lineer olduğundan $\sum_{i=1}^{n} a_i A(\alpha_i) = 0$

$\Rightarrow A(\alpha_i) = \beta_i$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i = 0$

$\Rightarrow \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ W için baz olup lineer bağımsız olduğundan

$a_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ bulunur.

$\Rightarrow \alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} 0\alpha_i = 0 \Rightarrow A: V \to W$ lineer dönüşümü bir lineer izomorfizmdir.